**Concours d'entrée Ts et Ts'**
**Session 2015**

| Epreuve de Physique |
| --- |

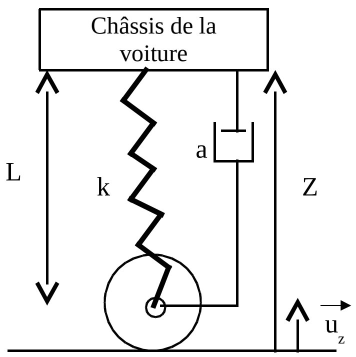
*Durée : 3 heures*
*Calculatrice ESGT ; sans document*

# Mécanique

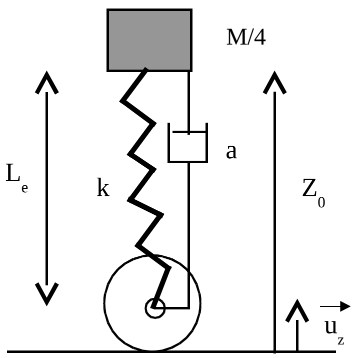
La suspension d'une automobile est assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- d'un ressort métallique hélicoïdal de constante de raideur k et de longueur à vide $l_0$
- d'un amortissement tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force de frottement visqueux de coefficient d'amortissement a. On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes.

Les pneus de rayon extérieur R sont considérés comme régulièrement rigides. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement et positivement vers le haut ( $\vec{u}_z$ , vecteur unitaire vertical)




On peut donc schématiser chaque système de la façon suivante :




On notera g l'accélération de la pesanteur terrestre.

**1)** Le véhicule étant immobile sur un sol horizontal, quelle est la longueur $L_e$ des ressorts au repos et la garde au sol $z_0$ du véhicule.

**2)** Dans cette question on néglige la force de frottement visqueux. Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

**2.1)** En utilisant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle de la position verticale z(t) du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z}+\omega_0^2 z=\delta_0 \qquad (1)$$

où $\omega_0$ et $\delta_0$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de k, M et $z_0$.

**2.2)** Déterminer alors l'expression complète de la solution z(t) en fonction de $z_0$, h et $\omega_0$. La solution générale z(t) est la somme de la solution de l'équation différentielle sans second membre $\ddot{z}+\omega_0^2 z=0$ et d'une solution particulière.

**2.3)** En déduire alors l'expression complète de la solution z(t) de l'équation différentielle (1) en fonction de $z_0$, h et $\omega_0$ .

**2.4)** En déduire que le mouvement observé est un mouvement oscillatoire de période $T_0$ que l'on exprimera en fonction de M et k.

**Désormais on considère la force de frottement visqueux dans toutes les questions suivantes.**

**3)** Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

**3.1)** En utilisant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle de la position verticale z(t) du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z}+\alpha\,\dot{z}+\beta z=\delta \qquad (2)$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\delta$ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de a, k, M et $z_0$.

**3.2)** On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final le plus bref possible ce qui équivaut à considérer le régime critique de l'oscillateur. A partir de l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre :

$$\ddot{z}+\alpha\,\dot{z}+\beta z=0 \qquad (3)$$

dont on cherche des solutions de la forme $Aexp(rt)$ , donner la valeur de $\alpha$ en fonction de $\beta$. En déduire celle de a en fonction de M et k.

**3.3)** Montrer que $z_1(t)=\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)$ et $z_2(t)=t\exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right)$ sont deux solutions de l'équation différentielle sans second membre (3).

**3.4)** En déduire alors l'expression complète de la solution z(t) de l'équation différentielle (2) en fonction de $z_0$, h et $\omega_0$ défini en 2.1).

**3.5)** Tracer le graphe z(t). (On prendra $z_0 = 1$ m ; $h = z_0/4$ m ; $\omega_0 = 1$ rad $s^{-1}$)

**4)** On effectue de nouveau le même essai en charge nominale, le véhicule contenant quatre masses égales chacune à m également réparties sur les quatre systèmes (ressort – amortisseur), la nouvelle garde au sol étant $z_0$'.

**4.1)** Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par z(t), et l'écrire sous la forme

$$\ddot{z}+\alpha'\dot{z}+\beta' z=\delta' \qquad (4)$$

en exprimant les nouvelles constantes α', β' et δ' en fonction de a, k, M, m et $z_0$'.

**4.2)** Montrer que dans ces conditions, l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre $\ddot{z}+\alpha'\dot{z}+\beta' z=0$ admet deux solutions complexes conjuguées. En déduire que le véhicule oscille et donner le nom de ce régime oscillatoire.

**4.3)** Donner la forme générale de la solution z(t).

**4.4)** Déterminer l'expression de la période T des oscillations autour de la position d'équilibre final en fonction de k, M et m.

**4.5)** On souhaite obtenir T = π/3 pour M = 1000 kg et m = 100 kg. En déduire la valeur et l'unité de k puis celles de a.

***Fin de l'exercice***

# Optique

*Les deux exercices sont indépendants, bien que l'exercice 1 fournisse des relations utiles pour l'exercice 2. Les résultats des applications numériques devront être donnés avec un nombre de chiffres significatifs cohérent avec les données numériques de l'énoncé.*

## Exercice 1 : Étude d'un miroir sphérique

On considère un miroir sphérique de rayon $R > 0$, de centre $C$ et de sommet $S$ (cf fig. 1). La relation de conjugaison qui lie la position d'un point objet $A$ de l'axe optique à celle de son image $A'$ est donnée par :

$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}} \quad (1).$$

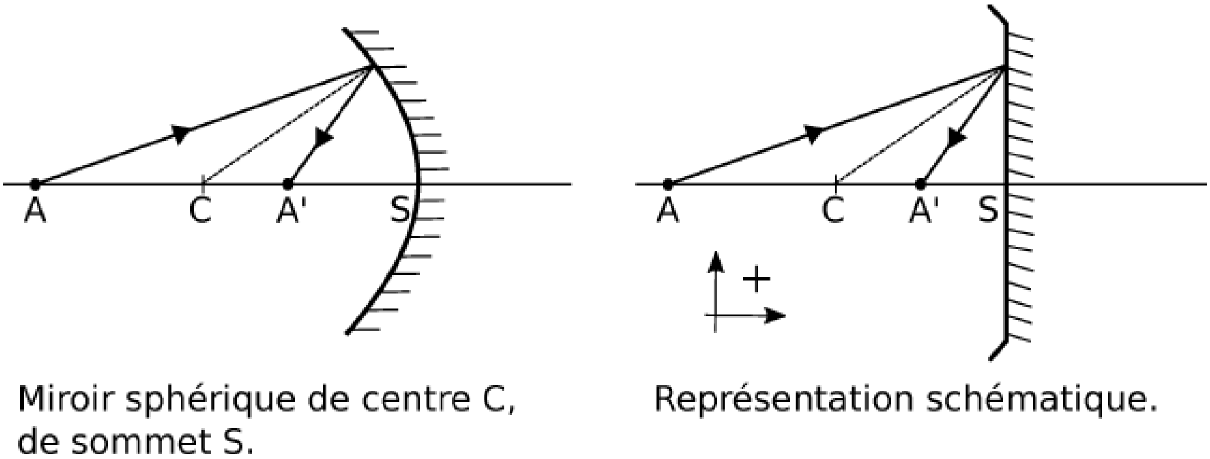



**Figure 1 : Miroir sphérique concave et sa représentation schématique.**

Les valeurs algébriques horizontales et verticales sont comptées positivement dans le sens des axes représentés sur la figure 1. La relation 1 est valable quels que soient les signes des valeurs algébriques de $\overline{SA}$, $\overline{SA'}$ et $\overline{SC}$.

1. Donner la définition des foyers objet $F$ et image $F'$ du miroir sphérique et déterminer leurs positions respectives. En déduire que $F = F'$.

2. Montrer que tout rayon qui passe par le centre $C$ du miroir est réfléchi dans la même direction que la direction incidente et dans le sens opposé.

3. La distance focale du miroir sera définie par $f = \overline{SF}$. Exprimer $f$ en fonction de $\overline{SC}$.

4. Soit $AB$ un petit objet dans un plan perpendiculaire à l'axe optique tel que $A$ soit placé sur l'axe optique avec $\overline{CA} < 0$ et $B$ soit un point situé au-dessus de $A$ dans le plan de la figure. La position du point $B$ est repérée par $\overline{AB} > 0$ .

   Construire en indiquant les traits de construction, l'image $A'B'$ de $AB$ par le miroir.

5. Le rayon passant par le point $B$ et le sommet $S$ du miroir est réfléchi avec un angle de réflexion égal à son angle d'incidence.

   Tracer ce rayon sur la figure réalisée à la question 4.

6. Définir le grandissement transversal $\gamma$ et montrer que : $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ .

7. Dans le cas des observations astronomiques, les objets sont situés à l'infini. La position relative de deux objets à l'infini telles deux étoiles peut alors être repérée par leur « distance angulaire ». Définir cette grandeur.

8. On souhaite observer deux étoiles $A$ et $B$ à l'aide d'un miroir sphérique (fig. 2). L'étoile $A$ se situe dans la direction de l'axe optique et l'étoile $B$ dans une direction faisant une angle $\alpha$ au-dessus de l'axe optique.

   Construire les images respectives $A'$ et $B'$ des étoiles $A$ et $B$.

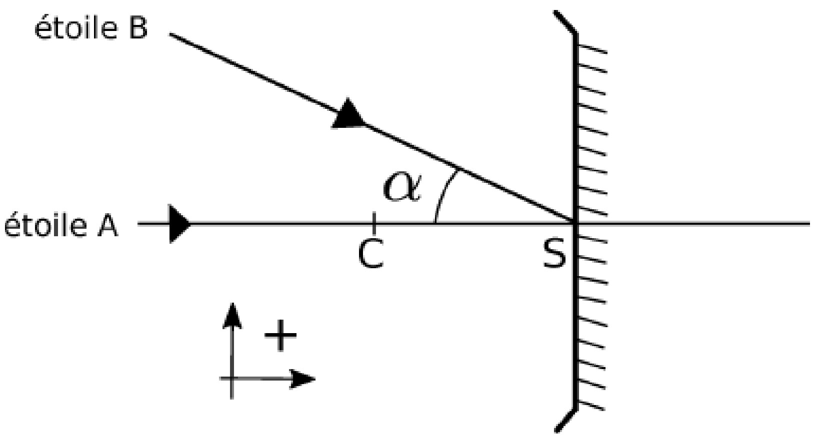



**Figure 2 : Observation de deux étoiles.**

9. Exprimer $\overline{A'B'}$ en fonction de $\alpha$ et des caractéristiques du miroir. Comment doit-on choisir le rayon de courbure du miroir utilisé ?

10. Citer les avantages de l'utilisation de miroirs dans les télescopes comparée aux lentilles dans les lunettes astronomiques.

***Fin de l'exercice 1***

## Exercice 2 : Étude d'un télescope « Cassegrain »

L'un des télescopes composant le « Very Large Telescope » (VLT) est composé de deux miroirs dont la surface coïncide avec celle d'une conique :

- un miroir primaire de forme parabolique concave ;
- un miroir secondaire de forme hyperbolique convexe.

Chaque miroir peut être modélisé par la calotte sphérique tangente à la surface réelle du miroir. Ainsi, le télescope réel est-il équivalent à un télescope à deux miroirs sphériques dont l'agencement est représenté sur la figure 3. Les valeurs algébriques horizontales et verticales sont comptées positivement dans le sens des axes représentés sur la figure 3.

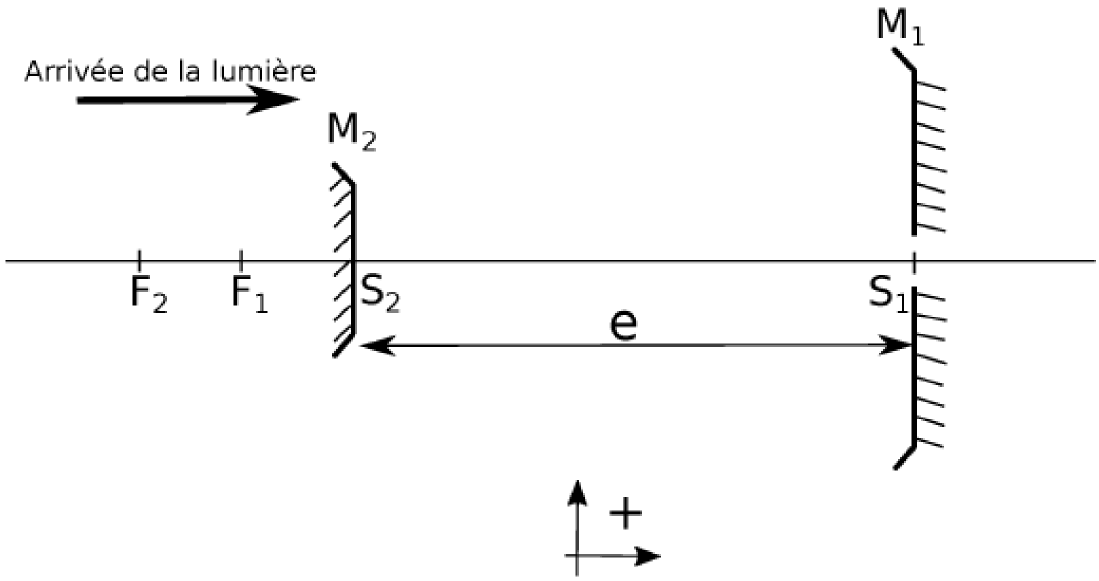



**Figure 3 : Télescope « Cassegrain ». Le foyer $F_1$ est situé entre $S_2$ et $F_2$.**

Le miroir primaire $M_1$, percé d'un trou de diamètre $D_3$ en son centre, est concave, de sommet $S_1$ et de foyer $F_1$. On notera $f_1$ sa distance focale, $R_1$ son rayon de courbure et $D_1$ son diamètre.

Le miroir secondaire $M_2$ est convexe, de sommet $S_2$ et de foyer $F_2$, situé à la distance $e$ du sommet $S_1$. On notera $f_2$ sa distance focale, $R_2$ son rayon de courbure et $D_2$ son diamètre.

Le miroir $M_1$ est le premier à recevoir la lumière en provenance des astres.

### Caractéristiques du dispositif à utiliser pour les applications numériques

| Miroir primaire | Miroir secondaire |
|---|---|
| $R_1 = 28{,}76\ m$ | $R_2 = 4{,}56\ m$ |
| $D_1 = 8{,}20\ m$ | $D_2 = 1{,}12\ m$ |
| $e = S_2S_1 = 12{,}4\ m$ | |
| $D_3 = 1\ m$ | |

Soient deux étoiles $A$ et $B$ séparées d'un angle $\alpha$, l'étoile $A$ étant dans la direction de l'axe du télescope et l'étoile $B$ étant située au-dessus de celui-ci dans le plan de la figure.

1. Déterminer les positions respectives $A'$ et $A''$ des images successives de $A$ par chaque miroir. Exprimer $\overline{S_2 A''}$ en fonction de $f_1$, $f_2$ et $e$.

2. Faire un schéma soigné représentant les images $B'$ et $B''$ de l'étoile $B$ par les miroirs successifs en indiquant les différents traits de construction.

3. Soit $\gamma_2$ le grandissement transversal obtenu par le second miroir. Exprimer $\overline{A'B'}$ et $\overline{A''B''}$ en fonction de $f_1$, $\gamma_2$ et $\alpha$.

4. Que représente le point $A''$ pour le télescope ?

5. Donner l'expression de la focale équivalente $f$ du télescope définie par : $f = \dfrac{\overline{A''B''}}{\alpha}$, en fonction de $\gamma_2$ et $f_1$.

6. Calculer numériquement la position du foyer global du télescope par rapport au sommet $S_1$, le grandissement $\gamma_2$ et la focale équivalente $f$ du télescope.

7. Calculer numériquement $\overline{A''B''}$ pour deux étoiles séparées par 1'' d'arc.

8. Dans le cas où le grandissement est supérieur à 1, quel est l'avantage de la configuration « Cassegrain » comparée à celle ne comportant qu'un miroir ?

9. Les images des étoiles sont obtenues à l'aide d'une caméra CCD placée dans le plan de front de l'image finale donnée par le télescope. Cette dernière est équipée d'un capteur formé de pixels carrés de $9\,\mu m$ de côté. Quel est le plus petit angle séparant deux étoiles qu'il est possible de résoudre avec ce dispositif ?

10. Soit $\alpha_m$ la valeur de l'angle $\alpha$ au-delà de laquelle aucun des rayons frappant le miroir primaire n'est réfléchi par le miroir secondaire, en l'absence du trou pratiqué dans le miroir $M_1$.
    Faire un schéma représentant deux rayons incidents arrivant en bordure du miroir $M_1$ et dont les rayons réfléchis arrivent respectivement en limite supérieure et inférieure du miroir $M_2$.

11. Exprimer $\alpha_m$ en fonction des diamètres des miroirs, de la distance $e$ et de $f_1$. En déduire la taille angulaire du champ du télescope et en faire le calcul numérique.

12. En réalité, le champ angulaire total n'est que de 15' d'arc. Quel élément est responsable de cette limitation du champ angulaire total

***Fin de l'exercice 2***