Nom :	Prénom :

le cnam
École supérieure des géomètres et topographes esgt

Épreuve de mathématiques

Concours d'entrée 2023

Q.C.M.
JUIN 2023
DURÉE : 1/2 H

Vous devez traiter les exercices suivants dans l'ordre qui vous convient le mieux.
Il y a toujours au moins une réponse correcte. Bon travail !

Exercice 1

Soit $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 - x}\,\mathrm{d}x$.

- ☐ $\dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x-1}$
- ☐ $\dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$
- ☐ $\dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$
- ☐ $I > 0$
- ☐ $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.
- ☐ $I = 2\ln(2) - \ln(3)$
- ☐ $I = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^x \tag{E}$$

et l'équation homogène associée

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0 \tag{EH}$$

On étudie ces équations sur $\mathbb{R}$.

- ☐ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $y_{EH}(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^x$ est une solution de (EH).
- ☐ Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $y_{EH}(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (EH).
- ☐ $(x^2\,\mathrm{e}^{-x})' = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.
- ☐ $y_{sp}(x) = \alpha x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ est solution de (E) si et seulement si $\alpha = 3$.
- ☐ $y_{sp}(x) = \alpha x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ est solution de (E) si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3

On se place dans le plan $\mathscr{P}$ orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère la courbe paramétrée définie pour le paramètre $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos^2(t) \end{cases}$$

et on note $M(t)$ le point de la courbe paramétrée de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$.

- ☐ $M(-t)$ est obtenu à partir de $M(t)$ par une symétrie d'axe (Oy).
- ☐ En $t = 0$, la courbe admet un point stationnaire.
- ☐ La tangente au point $M(0)$ a pour pente 2.
- ☐ La tangente au point $M(0)$ a pour pente -2.
- ☐ Lorsque $t \neq 0 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, une équation cartésienne de la tangente en $M(t)$ est

$$T_{M(t)} : -2\cos(t)x + y + \cos^2(t) = 0$$

Exercice 4

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbf{A}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

☐ $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3

☐ $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2

☐ $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ où $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Dans le plan complexe orienté, on note M_1 le point d'affixe z_1, M_2 d'affixe $z_2 = z_1^2$ et O le point d'affixe 0.

☐ Si $|z_1| = 1$ alors $|z_2| = 1$.

☐ $\arg(z_1) = 2 \times \arg(z_2)$

☐ $\arg(z_2) = 2 \times \arg(z_1) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

☐ $\arg(z_2) = 2 \times \arg(z_1) + 2k\pi (k \in \mathbb{N})$

☐ Si $z_1 = \mathrm{i}$ alors les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

.... **fin du QCM** ....