Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES

CONCOURS D'ENTRÉE
TS et TS'
Session 2017

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 3 heures – Coefficient : 3

Documents Interdits

Calculatrice personnelle autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

le cnam esgt
École supérieure des géomètres et topographes

Concours d'entrée TS

Session 2017

Épreuve de mathématiques

Durée : 3 heures

Calculatrice personnelle autorisée ; sans document

Ce devoir comporte deux problèmes entièrement indépendants que vous pouvez aborder dans n'importe quel ordre. Vous veillerez à indiquer clairement le numéro de chaque problème traité et à respecter la numérotation des questions proposée par l'énoncé. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées et les calculs expliqués par au moins une phrase. La présentation sera prise en compte dans l'appréciation finale de la copie. Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des questions du sujet pour obtenir une bonne note.

Problème 1 - *Alignement remarquable de trois points du plan*

Ce problème a pour but de démontrer à l'aide des nombres complexes, l'alignement remarquable de trois points du plan dans une configuration géométrique simple, décrite dans la partie B. Cette démonstration requiert l'utilisation de quelques résultats sur les liens qui lient géométrie plane et nombres complexes qui font l'objet de la partie A. La partie C envisage une réciproque de la propriété remarquable démontrée dans la partie B.

La partie B peut être traitée entièrement en admettant les résultats de la partie A. Il conviendra néanmoins de lire entièrement les définitions des notations à utiliser dans la suite. La partie C peut être traitée indépendamment de la partie B sous réserve d'avoir compris et admis les résultats de cette dernière.

PARTIE A : GÉOMÉTRIE PLANE & NOMBRES COMPLEXES

Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Tout point M du plan sera repéré par son affixe $z_M \in \mathbb{C}$. On rappelle que, dans ce cas, le module $|z_M|$ du nombre complexe z_M est égal à la norme $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$, et que son argument, $\arg(z_M)$, correspond à l'angle orienté $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}$ entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ modulo 2π.

1. Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Justifier que l'affixe $Z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à $z_B - z_A$. En déduire que :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left|Z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AB})} = \arg\left(Z_{\overrightarrow{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi].$$

2. Soit C un troisième point d'affixe z_C, aligné avec les points A et B et distinct de ces deux derniers. Justifier que, dans ce cas :

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi].$$

En déduire que le nombre complexe $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel.

3. Dans le cas où le point C est tel que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, que peut-on en déduire sur, respectivement :

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad \text{et} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \quad ?$$

4. Soit r l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe z' tel que :

$$|z'| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(z' - z) = \theta \quad [2\pi], \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

5. Montrer que le point M' d'affixe z', est l'image du point M d'affixe z, par la rotation plane de centre O et d'angle θ modulo 2π.
6. Justifier également que : $z' = e^{i\theta}z$ où i est le nombre complexe de module égal à 1 et d'argument $\pi/2$ modulo 2π.
7. Soit z un nombre complexe. On rappelle que le conjugué de z est le nombre $\overline{z}$ de même partie réelle que z, tel que : $\operatorname{Im}\overline{z} = \operatorname{Im} z$.

   Montrer que : $z\overline{z} = |z|^2$.
8. On suppose à présent $z \neq 0$ et soit z' un nombre complexe quelconque.

   Montrer que le rapport $\dfrac{z'}{z}$ est réel si et seulement si, le produit $z'\overline{z}$ l'est également.

Partie B : Propriété directe d'alignement

Dans la plan complexe $\mathscr{P}$, on considère le point O' d'affixe 1, et un point Ω d'affixe ω, situé en dehors de l'axe réel et tel que : $\Omega O = \Omega O'$. On appelle r la rotation plane de centre Ω, qui transforme O en O'.

1. Exprimer les affixes $Z_{\overrightarrow{\Omega O}}$ et $Z_{\overrightarrow{\Omega O'}}$ respectives des vecteurs $\overrightarrow{\Omega O}$ et $\overrightarrow{\Omega O'}$ en fonction de ω.
2. En déduire que :

$$\frac{Z_{\overrightarrow{\Omega O'}}}{Z_{\overrightarrow{\Omega O}}} = 1 - \frac{1}{\omega} \quad \text{et} \quad \left|1 - \frac{1}{\omega}\right| = 1.$$

3. Soit le point M' d'affixe z', image du point M d'affixe z, par la rotation r.

   Exprimer les affixes $Z_{\overrightarrow{\Omega M}}$ et $Z_{\overrightarrow{\Omega M'}}$ respectives des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction de ω, z et z'.
4. Pourquoi peut-on affirmer que :

$$\frac{Z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}{Z_{\overrightarrow{\Omega M}}} = 1 - \frac{1}{\omega}\ ?$$

5. En déduire que l'expression complexe de la rotation r est de la forme : $r(z) = z' = \left(1 - \dfrac{1}{\omega}\right)z + 1$.
6. Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par Ω, et $\mathscr{C}'$, le cercle de centre O' passant également par Ω.

   Justifier que les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont de même rayon R, et qu'ils ont nécessairement un second point d'intersection que l'on appellera Ω',d'affixe $\overline{\omega}$.
7. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$, distinct de Ω', d'affixe z. Soit M' l'image du point M par la rotation r.

   Montrer que : $z\overline{z} = \omega\overline{\omega} = R^2$.

8. En comparant le module des affixes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{O'M'}$, montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$.
9. Déterminer les affixes $Z_{\overrightarrow{\Omega'M'}}$ et $Z_{\overrightarrow{\Omega'M}}$ respectives des vecteurs $\overrightarrow{\Omega'M'}$ et $\overrightarrow{\Omega'M}$ en fonction de z, ω et leurs conjugués.
10. Exprimer ensuite le rapport $\dfrac{Z_{\overrightarrow{\Omega'M'}}}{Z_{\overrightarrow{\Omega'M}}}$ et montrer que ce dernier est réel.
11. En déduire que les points Ω', M et M' sont alignés.
12. Dans le cas où le point M est confondu avec Ω', montrer que la droite (MM') est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en Ω'.
13. Pourquoi peut-on généraliser les résultats précédents en supposant le point O' d'affixe réelle quelconque différente de 0 et 1 ?

PARTIE C : PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sécants en deux points Ω et Ω' et D une droite passant par Ω'. On suppose également que D recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en M, et le cercle $\mathscr{C}'$ en M'.

1. Soit r la rotation plane qui transforme le cercle $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et soit M_r, l'image du point M par la rotation r, autrement dit : $r(M) = M_r$.
2. Montrer que, d'après la partie B, $M_r = M'$ ou $M_r = \Omega'$.
3. Montrer que l'égalité $M_i = \Omega'$ est en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. En déduire que $M' = r(M)$.
4. Sur une figure, placer un point Ω et deux points P et P' tels que $\Omega P = \Omega P'$. Soit Q un point quelconque distinct de Ω et P.

   Donner un programme de construction qui permette de tracer au compas et à la règle, le point Q', image du point Q par la rotation de centre Ω qui transforme le point P en P'.

Problème 2 - *Étude de la fonction « cotangente »*

La fonction cotangente est définie pour tout réel x tel que $\sin(x) \neq 0$ par : $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. On se propose d'étudier quelques propriétés remarquables de cette fonction dans les parties A et B suivantes. La partie B peut être entièrement traitée en admettant les résultats de la partie A.

PARTIE A

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction cotangente.
2. Montrer que la fonction cotangente est dérivable sur $\mathscr{D}$ et que sa dérivée peut s'exprimer par :

$$\text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x).$$

3. Vérifier que la fonction cotangente est impaire, périodique, de période π.
4. Dresser le tableau des variations de la fonction cotangente sur l'intervalle $]O, \pi[$. On précisera, en les justifiant, les limites aux bornes ainsi que les valeurs prises par la fonction et sa dérivée en $\pi/2$.

5. Montrer que la courbe représentative de la fonction cotangente possède un point d'inflexion sur l'intervalle $]O, \pi[$, et donner l'équation de la tangente à la courbe représentative en ce point.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction cotangente sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ dans un repère orthonormal.
7. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
8. En déduire que, pour tout x dans le même intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\text{cotan}^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \text{cotan}^2(x).$$

PARTIE B

Soient deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies pour tout entier n non nul, par :

$$S_1 = 1, \quad \text{et pour } n \geq 2,\ S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

1. Justifier que : $S_n = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$.
2. Montrer que si k est un entier compris entre 1 et n, alors : $0 \leq \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.
3. Pour tout entier n non nul, on montre que :

$$\text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) + \text{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \cdots + \text{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}.$$

En utilisant les résultats de la partie A et des questions 1 et 2 précédentes, montrer que, pour tout entier n non nul :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(\frac{2n(2n-1)}{6}\right) \leq S_n \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{2n(2n-1)}{6}\right).$$

4. En déduire que la suite (S_n) est convergente et préciser sa limite S.
5. Montrer que la suite (T_n) est convergente et de même limite que (S_n).
6. Montrer que pour tout entier n non nul : $S_n \leq S \leq T_n$.
7. En déduire que, pour tout entier n non nul : $|S_n - S| \leq T_n - S_n$.
8. Déterminer un entier naturel N tel que : $|S_n - S| < 10^{-2}$
9. En déduire une valeur approchée de la somme $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ à 10^{-2} près défaut.

Fin de l'épreuve