Nom :	Prénom :

Concours d'entrée TS

Session 2021

Q.C.M de mathématiques

Durée : 1 h

Sans document ; calculatrice personnelle autorisée

*Le sujet comporte **6** pages.*

*Cette épreuve comporte 3 problèmes indépendants comportant au total 20 Q.C.M. Chaque questionnaire ne comporte qu'**une seule** proposition correcte. Une réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse n'apporte pas de point et n'en retire pas.*

Bon travail !

PROBLÈME 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x-3| - \dfrac{2}{x-1}$. Après avoir étudié la fonction f, répondez aux 6 questions ci-après.

Question 1

Cochez la proposition correcte

- ☐ f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{+1\}$.
- ☐ f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{+1, +3\}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 2

Cochez la proposition correcte

- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\leftarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\leftarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\leftarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\leftarrow 1^-} f(x) = +\infty$.
- ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\leftarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\leftarrow 1^-} f(x) = +\infty$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 3

Cochez la proposition correcte

- ☐ f est décroissante sur $\left[1-\sqrt{2},1\right[\cup\left]1,1+\sqrt{2}\right]$.
- ☐ f est croissante sur $\left[1-\sqrt{2},1\right[\cup\left]1,1+\sqrt{2}\right]\cup]3,+\infty[$.
- ☐ f est croissante sur $\left]-\infty,1-\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{2},3\right[$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 4

Cochez la proposition correcte

- ☐ La courbe représentative de f possède deux demi-tangentes de pentes respective $-1/2$ à gauche et $+3/2$ à droite au point $(3,-1)$.
- ☐ La courbe représentative de f possède une tangente de pente $-1/2$ au point $(3,-1)$.
- ☐ La courbe représentative de f possède deux demi-tangentes de pentes respective $+3/2$ à gauche et $-1/2$ à droite au point $(3,-1)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 5

Cochez la proposition correcte

- ☐ La courbe représentative de f admet une asymptote verticale et deux asymptotes obliques de pentes opposées
- ☐ La courbe représentative de f admet une asymptote verticale et deux asymptotes obliques de mêmes pentes
- ☐ La courbe représentative de f admet deux asymptotes verticales et une asymptote oblique de pente égale à 1.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 6

Cochez la proposition correcte

- ☐ L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique strictement inférieure à 3.
- ☐ L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions unique dans l'intervalle $[0,2]$.
- ☐ L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

PROBLÈME 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x(x+1)}$. Répondez aux questions ci-après.

Question 7

Quelle est la bonne expression de f ?

- ☐ $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x+1}$.
- ☐ $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x+1}$.
- ☐ $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x+1}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 8

Quelle expression corrrespond à une primitive de f ?

- ☐ $\ln \dfrac{4(x+1)}{x}$.
- ☐ $\ln \dfrac{x}{(x+1)^4}$.
- ☐ $\ln \dfrac{(x+1)^4}{x}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 9

L'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ est propotionnelle à

- ☐ l'opposé de l'aire de la surface sous la courbe représentative de f entre les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.
- ☐ l'aire de la surface sous la courbe représentative de f entre les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.
- ☐ l'aire de la surface sous la courbe représentative de f entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 1$ et $y = 2$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 10

La courbe représentative de f est représentée dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| =$ 1 cm. Quelle est l'aire de la surface définie à la question 9 ?

- ☐ $5\ln 2 - 4\ln 3$.
- ☐ $2,7206\,\text{cm}^2$.
- ☐ $\approx 0,9289\,\text{cm}^2$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

PROBLÈME 3

L'espace euclidien de dimension 3 est muni d'un repère othonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère un point M dont les coordonnées (x, y, z) dans ce repère sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y & = & 4 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t \\ z & = & 4 + 3\sin t \end{array}\right.$$

Question 11

En considérant le point M mobile en fonction du temps t, quelle est l'équation cartésienne du plan P qui contient sa trajectoire ?

- ☐ $x + z = 8$.
- ☐ $x - z = 8$.
- ☐ $x + y = -8$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 12

Soit C le point de coordonnées $(4, 4, 4)$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CM}$ où M est un point quelconque ?

- ☐ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, +\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, +3\sin t\right)$.
- ☐ $\left(+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, +3\sin t\right)$.
- ☐ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, +\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, -3\sin t\right)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 13

Quelle valeur correspond à la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{CM}$?

- ☐ 18.
- ☐ $3\sqrt{2}$.
- ☐ 3.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 14

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre C et de rayon 3. Quel mouvement le point M réalise-t-il lorsque t parcourt l'intervalle $[0, 4\pi]$?

- ☐ un tour du cercle $\mathscr{C}$ dans le sens horaire.
- ☐ deux tours du cercle $\mathscr{C}$ dans le sens trigonométrique.
- ☐ quatre tours du cercle $\mathscr{C}$ dans le sens trigonométrique.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 15

Le vecteur $\overrightarrow{V}(t)$ de coordonnées cartésiennes $\left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$ correspond au vecteur-vitesse au point M à l'instant t. Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse ?

- ☐ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, +\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos t, +3\sin t\right)$.
- ☐ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, +3\cos t\right)$.
- ☐ $\left(+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, +3\cos t\right)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 16

Quelle est la valeur de la norme $\|\overrightarrow{V}(t)\|$ du vecteur vitesse ?

- ☐ 9.
- ☐ $2\sqrt{3}$.
- ☐ $3\sqrt{2}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

PROBLÈME 3

Un série de 9 pesées successives p_1, $p_2, \ldots$, p_9 d'une masse étalon sur un balance de laboratoire a donné les résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{9} p_k = 4275\,\mathrm{g} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{9} p_k^2 = 2\,031\,777\,\mathrm{g}^2.$$

On fera l'hypothèse que les pesées sont indépendantes et suivent la même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ où m est un réel quelconque et σ un réel strictement positif.

Question 17

Quelle est la valeur de la moyenne empirique de la série ?

- ☐ 475,0 g.
- ☐ 427,5 g.
- ☐ 237,5 g.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 18

Quelle est la valeur de la variance empirique **non biaisée** de la série ?

- ☐ 128 g^2.
- ☐ 2 277 g^2.
- ☐ 144 g^2.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 19

Suite à un étalonnage de la balance, on estime que $\sigma = 3$ g. Que représente σ pour chaque pesée ?

- ☐ la variance théorique.
- ☐ l'écart-type.
- ☐ la variance empirique.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 20

Quelle est l'intervalle de confiance à 95 % de la moyenne m ? On rappelle que si U est une variable aléatoire normale, centrée, réduite $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(U \in [-1{,}96\,;+1{,}96]) = 95\%$

- ☐ $[469{,}1\,; 489{,}9]$ g.
- ☐ $[473{,}0\,; 477{,}0]$ g.
- ☐ $[471{,}6\,; 478{,}4]$ g.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Fin de l'énoncé