| Nom : | Prénom : |
|---|---|

**Concours d'entrée TS**

**Session 2023**

# Q.C.M de mathématiques

*Durée : 1 h*

*Sans document ; calculatrice personnelle autorisée*

*Le sujet comporte **7** pages.*

*Cette épreuve comporte 4 exercices indépendants comportant au total 20 Q.C.M. Chaque question ne comporte qu'**une seule** proposition correcte. Une réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse n'apporte pas de point et n'en retire pas.*

*Bon travail !*

## EXERCICE 1 : ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit la fonction numérique $f : x \longmapsto \dfrac{5x^2 - 10x}{(x-1)^2}$.

### Question 1

Soit $D_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$.
Cochez la proposition correcte

- ☐ $D_f = \mathbb{R}$.
- ☐ $D_f = \mathbb{R}^+$.
- ☐ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 2

Pour tout $x \in D_f$, on pose : $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

Déterminez les réels $a$ et $b$.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $a = +5$ et $b = -5$.
- ☐ $a = +5$ et $b = +5$.
- ☐ $a = -5$ et $b = +5$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 3

Déterminez la primitive $F$ de $f$ telle que $F(2) = 1$
Quelle est la bonne expression de $F$ ?

- ☐ $F(x) = \dfrac{5x^2 + 9x - 9}{x - 1}$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{5x^2 + 19x - 19}{x - 1}$.
- ☐ $F(x) = \dfrac{5x^2 - 19x + 19}{x - 1}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

## EXERCICE 2 : PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les points $M(0,-3,-2)$, $N(4,0,0)$, $P(2,0,-1)$. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par les points $M$, $N$, $P$.

### Question 4

Calculez les coordonnées d'un vecteur unitaire et normal au plan $\mathscr{P}$.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)$.
- ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$.
- ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,-1,2)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 5

Déterminez l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $x - 2z + 4 = 0$.
- ☐ $x + 2z - 4 = 0$.
- ☐ $x - 2z - 4 = 0$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 6

Parmi les points suivants, lequel appartient au plan $\mathscr{P}$ ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $Q(12,3,-4)$.
- ☐ $R(12,2,-4)$.
- ☐ $S(-12,3,4)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

## EXERCICE 3 : ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION DE L'ESPACE

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère un point $M(x, y, z)$ et son transformé $M'(x', y', z')$ par une transformation $S$ de l'espace. Les coordonnées $(x', y', z')$ sont reliées aux coordonnées $(x, y, z)$ par les trois relations suivantes :

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z) \\ y' &= \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ z' &= \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z) \end{cases}$$

**Question 7**

Déterminez l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points invariants par la transformation $S$.
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\mathscr{E}$ est le plan d'équation $x - y + z = 0$.
- ☐ $\mathscr{E}$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$.
- ☐ $\mathscr{E}$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

**Question 8**

Déterminez les images des points $P(1, 1, 1)$ et $P'(-1, -1, -1)$ par la transformation $S$.
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $S(P)$ a pour coordonnées $(-1, -1, -1)$, $S(P')$, $(1, 1, 1)$.
- ☐ $S(P)$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$, $S(P')$, $(-1, -1, -1)$.
- ☐ $S(P)$ a pour coordonnées $(-1, 1, -1)$, $S(P')$, $(1, -1, 1)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

**Question 9**

Quelle est la nature de la transformation $S$ ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $S$ est une rotation d'axe $D$ de vecteur directeur $(1, 1, 1)$ d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- ☐ $S$ est une réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.
- ☐ $S$ est une réflexion par rapport au plan d'équation $x + y - z = 0$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

**Question 10**

On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $Q(x,y,z)$ de l'espace qui vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & = & 3 \\ x+y+z & = & 0 \end{cases}$$

Déterminez la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$. Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\mathscr{C}$ est un cercle de centre $O$ et de rayon $\sqrt{3}$ situé dans le plan d'équation $x+y+z=0$.
- ☐ $\mathscr{C}$ est un cercle de centre $O$ et de rayon 1 situé dans le plan d'équation $z=0$
- ☐ $\mathscr{C}$ est un cercle de centre $O$ et de rayon 3 situé dans le plan d'équation $x+y+z=0$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

## EXERCICE 4 : ÉTUDE D'UNE CYCLOÏDE - PARTIE 1

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la cycloïde $\mathscr{C}$ dont une représentation paramétrique est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) & = & 5(t-\sin t) \\ \\ y(t) & = & 5(1-\cos t) \end{cases}.$$

La représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$ pour $t$ appartenant à un intervalle fermé borné $J \subset \mathbb{R}$ est donnée sur la figure 1.

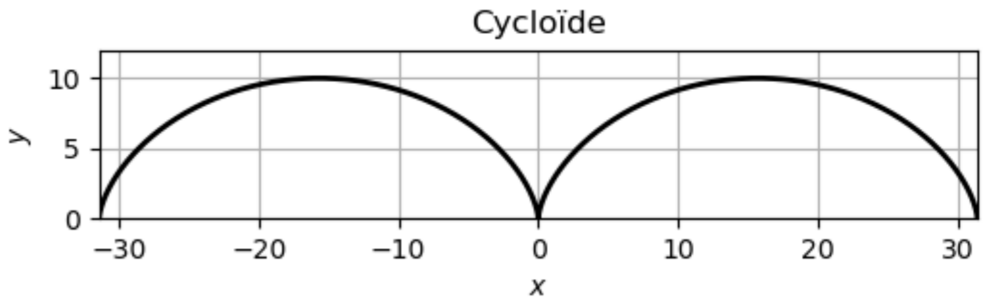


FIGURE 1 – Représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}$.

**Question 11**

Par quelle transformation géométrique passe-t-on du point $M(t)$ au point $M(t+2\pi)$ tous deux appartenant à $\mathscr{C}$ ?

Cochez la proposition correcte.

- ☐ une symétrie axiale dont l'axe est la droite d'équation $x = 10\pi$.
- ☐ une translation de vecteur $10\pi\vec{j}$.
- ☐ une translation de vecteur $10\pi\vec{i}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 12

Compte tenu du résultat de la question précédente, sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ suffit-il d'étudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $[-\pi/2, +\pi/2]$.
- ☐ $[0, +\pi/2]$.
- ☐ $[-\pi/2, 0]$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 13

Après avoir étudié la parité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, quel intervalle réduit convient pour étudier la courbe $\mathscr{C}$ ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $[0, \pi]$.
- ☐ $[-\pi, \pi]$.
- ☐ $[0, 2\pi]$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 14

Soient $x'$ et $y'$ les dérivées respectives de $x$ et $y$.
Cochez les bonnes expressions de $x'$ et $y'$

- ☐ $x'(t) = 5\sin t$ ; $y'(t) = 5(1-\cos t)$.
- ☐ $x'(t) = 5(1-\cos t)$ ; $y'(t) = 5\sin t$.
- ☐ $x'(t) = 5(1+\cos t)$ ; $y'(t) = -5\sin t$.
- ☐ Aucune des trois expressions précédentes.

### Question 15

Après avoir dressé le tableau des variations de $x$ et $y$ sur l'intervalle $I = [0, \pi]$, cochez la proposition correcte parmi celles données ci-après.

- ☐ $x$ est croissante sur $I$ et $y$, décroissante sur $I$.
- ☐ $x$ est décroissante sur $I$ et $y$, croissante sur $I$.
- ☐ $x$ et $y$ sont toutes deux décroissantes sur $I$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 16

Déterminez les pentes de tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points $M(t)$ pour $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$.
Cochez ensuite la proposition correcte parmi celles données ci-après.

- ☐ $\mathscr{C}$ possède une demi-tangente verticale en $M(\pi)$ et deux tangentes horizontales en $M(0)$ et $M(2\pi)$.
- ☐ $\mathscr{C}$ possède une tangente horizontale en $M(\pi)$ et deux demi-tangentes verticales en $M(0)$ et $M(2\pi)$.
- ☐ $\mathscr{C}$ possède une tangente horizontale en $M(0)$ et deux demi-tangentes verticales en $M(\pi)$ et $M(2\pi)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

## EXERCICE 4 : ÉTUDE D'UNE CYCLOÏDE - PARTIE 2

Cet exercice prend la suite de l'exercice précédent. On rappelle la relation qui permet de calculer la longueur $L$ de l'arc de courbe compris entre les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ où $t_1$ et $t_2$ sont deux réels tels que $t_1 < t_2$ :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[(x'(u))^2 + (y'(u))^2\right]}\, du.$$

On rappelle également la relation trigonométrique suivante : $1 - \cos u = 2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$.

### Question 17

Parmi les relations ci-après, laquelle permet de calculer longueur $L$ de l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ compris entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$ ?
Cochez la bonne relation.

- ☐ $10\int_0^{2\pi} \sin\frac{u}{2} du.$
- ☐ $5\int_0^{2\pi} \sin\frac{u}{2} du.$
- ☐ $-10\int_0^{2\pi} \sin\frac{u}{2} du.$
- ☐ Aucune des trois relations précédentes.

### Question 18

Calculez le longueur $L$ de l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ compris entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$.
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $L = 20.$
- ☐ $L = 10.$
- ☐ $L = 10\sqrt{2}.$
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

### Question 19

Le rayon de courbure $R$ d'une courbe paramétrée en tout point où ce dernier est défini, est donné par :

$$R = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

Déterminez l'expression du rayon de courbure $R$ de la courbe $\mathscr{C}$ en fonction de $t$.
Cochez la bonne expression de $R$.

- ☐ $R = 20(1+\cos t).$
- ☐ $R = 20\sin\frac{t}{2}.$
- ☐ $R = 10\sin\frac{t}{2}.$
- ☐ Aucune des trois expressions précédentes.

**Question 20**

Calculez le rayon de courbure de la courbe $\mathscr{C}$ au point $M(\pi)$.
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $R = 10$.
- ☐ $R = 0$.
- ☐ $R = 20$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

## Fin de l'énoncé