Nom :	Prénom :

Concours d'entrée TS

Session 2024

Q.C.M de mathématiques

Durée : 1 h

Sans document ; calculatrice personnelle autorisée

*Le sujet comporte **8** pages.*

*Cette épreuve comporte 3 exercices indépendants comportant au total 20 Q.C.M. Chaque question ne comporte qu'**une seule** proposition correcte. Une réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse n'apporte pas de point et n'en retire pas.*

Bon travail !

EXERCICE 1 : ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit la fonction numérique $f\,:\,x \longmapsto \dfrac{1-3x}{x(x+1)}$.

Question 1

Soit D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
Cochez la proposition correcte

- ☐ $D_f = \mathbb{R}^*$.
- ☐ $D_f = \mathbb{R} - \{0,1\}$.
- ☐ $D_f = \mathbb{R} - \{0,-1\}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 2

Pour tout $x \in D_f$, on pose : $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$ où A et B sont deux réels.
Déterminez les réels A et B.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $A = +1$ et $B = +4$.
- ☐ $A = -1$ et $B = +4$.
- ☐ $A = -1$ et $B = -4$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 3

La fonction f est dérivable sur D_f.
Quelle est la bonne expression de sa dérivée f' ?

☐ $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2(x+1)^2}$.

☐ $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{x^2(x+1)^2}$.

☐ $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$.

☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 4

Déterminez le signe de f sur l'intervalle $I = [1,2]$ Quelle est la bonne réponse ?

☐ $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

☐ f change de signe une fois sur I.

☐ $\forall x \in I,\ f(x) < 0$.

☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 5

Déterminez l'expression des primitives F de f.
Quelle est la bonne expression ?

☐ $F(x) = \ln|x| - 4\ln|x-1| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

☐ $F(x) = \ln|x| - 4\ln|x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

☐ $F(x) = -\ln|x| + 4\ln|x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 6

Calculez numériquement l'aire du domaine plan muni d'un repère orthonormé compris entre le graphe $(\mathscr{C})$ de la fonction f, l'axe des abscisses (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
On donne : $\ln 2 \approx 0,6931$ et $\ln 3 \approx 1,0986$ Cochez la bonne proposition.

☐ $0,9289$ u.a.

☐ $7,8600$ u.a.

☐ $2,6220$ u.a.

☐ Aucune des trois propositions précédentes.

« u.a. » : unité d'aire.

EXERCICE 2 : ÉTUDE D'UNE COURBE PLANE

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la courbe $(\mathscr{E})$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4,+4]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}.$$

Question 7

Parmi les courbes représentées sur la figure 1, laquelle correspond à la courbe $(\mathscr{E})$?
Cochez la proposition correcte.

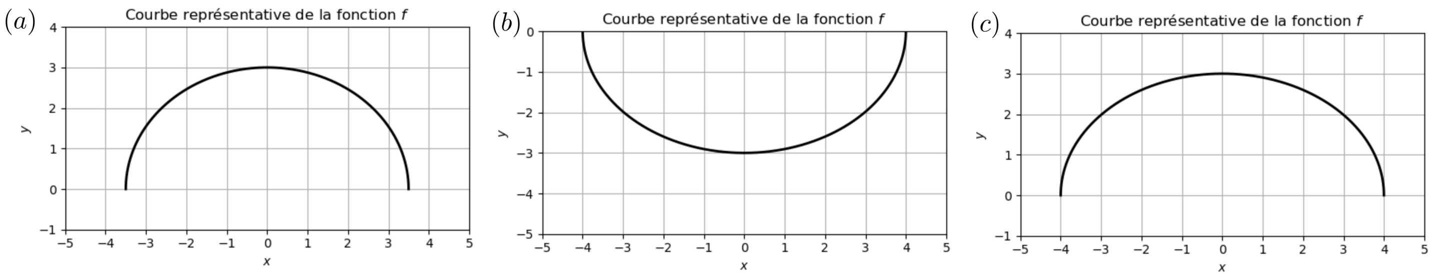

FIGURE 1 – Représentation graphique de la courbe $(\mathscr{E})$.

- ☐ (a)
- ☐ (b)
- ☐ (c)
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 8

Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $[-4,+4[$.
- ☐ $[-4,+4]$.
- ☐ $]-4,+4]$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 9

Quelle est l'expression de la dérivée f' de la fonction f ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $-\dfrac{3x}{4\sqrt{16-x^2}}$.
- ☐ $+\dfrac{3x}{4\sqrt{16-x^2}}$.
- ☐ $-\dfrac{3x}{8\sqrt{16-x^2}}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 10

Quelles sont les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-4,+4[$?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ strictement décroissante sur $]-4,0]$ et strictement croissante sur $]0,+4[$.
- ☐ strictement croissante sur $]-4,0]$ et strictement décroissante sur $]0,+4[$.
- ☐ croissante sur $]-4,0]$ et décroissante sur $]0,+4[$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 11

La courbe $(\mathscr{E})$ admet des demi-tangentes parallèles à (Oy) en $x=-4$ et $x=+4$, pourquoi ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +4^-} \dfrac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 12

Soit $P(x_P, y_P)$ un point du plan tel que $|x_P| < 4$ et $f(x_P) < y_P$ et soit le système (S) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & f(x),\ x \in I \\ y & = & mx + (y_P - mx_P),\ m \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions du système (S) est constitué de tous les couples (x,y) des coordonnées des points d'intersection entre la courbe $(\mathscr{E})$ et la droite (D_m) passant par P de coefficient-directeur égal à m. Combien de couples cet ensemble peut-il contenir ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ deux couples exactement.
- ☐ au moins deux couples.
- ☐ au plus deux couples.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 13

La résolution du système (S) indique que l'équation E_m satisfaite par l'abscisse x d'un point d'intersection entre la courbe $(\mathscr{E})$ et la droite (D_m) vérifie l'équation du second degré suivante :

$$(16m^2+9)x^2 + 32m(y_P - mx_P)x + 16\left[(y_P - mx_P)^2 - 9\right] = 0.$$

On rappelle que le discriminant réduit Δ' d'une équation du second degré de la forme $ax^2+2b'x+c=0$, $a \neq 0$ s'exprime par : $\Delta' = b'^2 - ac$. Quelle condition doit vérifier le discriminant Δ' de l'équation E_m pour que cette dernière n'ait qu'une solution ? Dans ce cas, la droite (D_m) qui passe par le point P est également tangente à la courbe $(\mathscr{E})$. Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\Delta' = 0$.
- ☐ $\Delta' >, 0$.
- ☐ $\Delta' < 0$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 14

Quelle est l'expression équivalent à l'équation $\Delta' = 0$?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $(16 - x_P^2)m^2 - 2x_P y_P m + 9 - y_P^2 = 0$.
- ☐ $(16 + x_P^2)m^2 + 2x_P y_P m + 9 - y_P^2 = 0$.
- ☐ $(16 - x_P^2)m^2 + 2x_P y_P m + 9 - y_P^2 = 0$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 15

À quelle condition les droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p$ où $m, m' \neq 0$ sont-elles perpendiculaires entre elles ?
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $mm' = +1$.
- ☐ $\dfrac{m}{m'} = -1$.
- ☐ $mm' = -1$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 16

Quelle est la relation vérifiée par le produit mm' des solutions m et m' de l'équation déterminée à la question 14, lorsque les droites $(D_m)\ :\ y = mx + p$ et $(D_{m'})\ :\ y = m'x + p'$ sont perpendiculaires ? On rappelle que le produit des solutions d'une équation de la forme $ax^2 + 2b'x + c = 0$, $a \neq 0$, est égal à $\dfrac{c}{a}$.
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\dfrac{y_P^2 - 9}{x_P^2 - 16} = +1.$
- ☐ $\dfrac{y_P^2 - 9}{x_P^2 - 16} = -1.$
- ☐ $(y_P^2 - 9)(x_P^2 - 16) = -1.$
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 17

En utilisant les résultats des questions 13 et 16, déterminez l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points P par lesquels on peut mener deux droites tangentes à la courbe $(\mathscr{E})$ et perpendiculaires entre elles.
Cochez la proposition correcte.

- ☐ $(\mathscr{C})$ est le demi-cercle de centre O, de rayon 5 situé en dessous de l'axe (Ox).
- ☐ $(\mathscr{C})$ est le demi-cercle de centre O, de rayon 25 situé au-dessus de l'axe (Ox).
- ☐ $(\mathscr{C})$ est le demi-cercle de centre O, de rayon 5 situé au-dessus de l'axe (Ox).
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

EXERCICE 3 : INTERSECTION DE SURFACES

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les surfaces $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$, d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{array}{lcl} (\mathscr{S}_1) & : & x^2+y^2+z^2 = 16, \\ (\mathscr{S}_2) & : & (x-4)^2+y^2+z^2 = 9, \\ (\mathscr{S}_3) & : & (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 = 4. \end{array}$$

Question 18

Quelles sont les natures des surfaces $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$ sont des sphères de rayons respectifs 16, 9, 4, de centres différents.
- ☐ $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$ sont des sphères de rayons respectifs 16, 9, 4, de mêmes centres.
- ☐ $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$ sont des sphères de rayons respectifs 4, 3, 2, de centres différents.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 19

On cherche l'ensemble des points d'intersection des surfaces $(\mathscr{S}_1)$, $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$. Pour ce, il faut résoudre le système formé par les trois équations des ces surfaces. Après avoir retranché l'équation de la surface $(\mathscr{S}_1)$ de celles des surfaces $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$, déterminez le couple (x,y) solution du système formé par les équations de $(\mathscr{S}_2)$, $(\mathscr{S}_3)$ après transformation.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $(x,y) = \left(\dfrac{23}{8}, \dfrac{11}{4}\right)$.
- ☐ $(x,y) = \left(\dfrac{23}{4}, \dfrac{11}{8}\right)$.
- ☐ $(x,y) = \left(\dfrac{11}{4}, \dfrac{23}{8}\right)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 20

Achevez la résolution du système en déterminant les réels z qui satisfont l'équation de $(\mathscr{S}_1)$ pour chaque couple (x, y) déterminés à la question 19.
Cochez la bonne proposition.

- ☐ $z = \dfrac{\sqrt{11}}{8}$ ou $z = -\dfrac{\sqrt{11}}{4}$.
- ☐ $z = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$ ou $z = -\dfrac{\sqrt{11}}{8}$.
- ☐ $z = \dfrac{\sqrt{11}}{8}$ ou $z = -\dfrac{\sqrt{11}}{8}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Fin de l'énoncé