

Nom :

Prénom :



Concours d'entrée TS

Session 2025

Q.C.M de mathématiques

Durée : 1 h

Sans document ; calculatrice personnelle autorisée

Le sujet comporte 7 pages.

Cette épreuve comporte 2 problèmes indépendants comportant au total 20 questions dont 18 Q.C.M. et 2 questions dont la réponse est à inscrire sur ce sujet. Chaque Q.C.M. ne comporte qu'une seule proposition correcte. Une réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse n'apporte pas de point et n'en retire pas.

Bon travail !

PROBLÈME 1 : ÉTUDE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ représentée sur la figure 1.

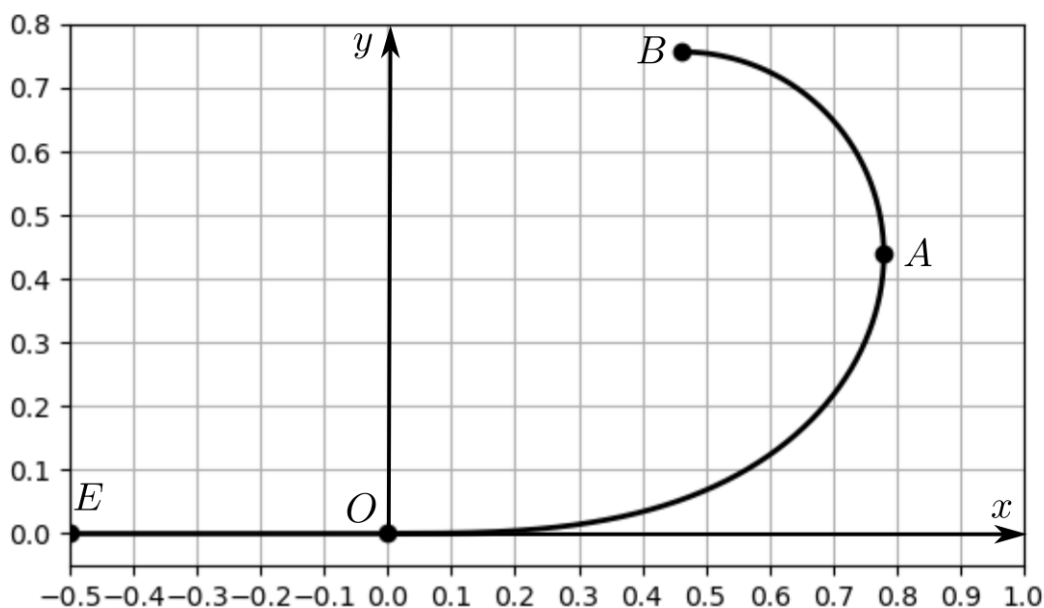


FIGURE 1 – Représentation graphique de la courbe $\mathcal{C}$.

La courbe $\mathcal{C}$ est constituée de trois courbes distinctes :

- un segment de droite $[EO]$;
- une courbe $\mathcal{C}_I$ qui relie les points O et A ;
- un arc de cercle qui relie les points A et B .

L'objet de ce problème est d'étudier plus particulièrement les propriétés de la courbe $\mathcal{C}_I$. Le lexique de l'Association Francophone de Topographie (AFT) indique que cette courbe est utilisée comme « courbe de raccordement entre un alignement droit et un cercle ».

Soit l'intervalle $I = [0, 1]$. Tout point M de la courbe $\mathcal{C}_I$ a pour coordonnées $(x(t), y(t))$ où t est un paramètre réel appartenant à I et x, y sont deux fonctions continues et indéfiniment dérivables sur I , dont les fonctions dérivées premières x' et y' sont données respectivement par :

$$\begin{cases} x'(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \\ y'(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \end{cases}.$$

En outre, vous admettrez que :

1. $x(0) = 0, y(0) = 0$;
2. $(x(1), y(1))$ sont les coordonnées du point A .

Question 1

La longueur l_{OA} de la courbe $\mathcal{C}_I$ se calcule par l'intégrale suivante :

$$l_{OA} = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Quelle est la valeur de cette longueur ?

Cochez la proposition correcte

- ☐ $l_{OA} = 0,8$.
- ☐ $l_{OA} = 1$.
- ☐ $l_{OA} = 1,5$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 2

Soit le vecteur $\vec{T}$ de coordonnées $(x'(t), y'(t))$. Quelle est sa norme $\|\vec{T}\|$?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $\|\vec{T}\| = 1,5$.
- ☐ $\|\vec{T}\| = 0,3$.
- ☐ $\|\vec{T}\| = 0,8$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 3

En supposant que $t \in I$, quelle est la bonne définition du vecteur $\vec{T}$?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_I$.
- ☐ $\vec{T}$ est le vecteur unitaire normal au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_I$.
- ☐ $\vec{T}$ est un vecteur tangent au point $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_I$
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 4

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{T}$ pour $t = 0$ et $t = 1$ respectivement ?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $\vec{T}(0) = (0, 1)$; $\vec{T}(1) = (1, 0)$.
- ☐ $\vec{T}(0) = (1, 0)$; $\vec{T}(1) = (1, 1)$.
- ☐ $\vec{T}(0) = (1, 0)$; $\vec{T}(1) = (0, 1)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 5

Représentez les vecteurs $\vec{T}(0)$ et $\vec{T}(1)$ sur la figure 1. Vous veillerez à placer l'origine de ces derniers sur les points adéquats. Vous respecterez également une échelle telle qu'une longueur égale à 0,5 correspond à un côté d'un carré du quadrillage.

Question 6

Soit $\phi(t)$ l'angle orienté entre le vecteur $\vec{i}$ et le vecteur $\vec{T}(t)$, $(\vec{i}, \vec{T}(t))$, pour $t \in I$. On comptera les angles positivement dans le sens direct. Quelle relation lie l'angle $\phi(t)$ au paramètre t ?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $\phi(t) = t^2$.
- ☐ $\phi(t) = \frac{\pi}{2} t^2$.
- ☐ $\phi(t) = \frac{\pi}{2} (t^2 + 1)$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 7

Soit le vecteur $\vec{N}(t)$ de coordonnées $(-\sin \phi(t), \cos \phi(t))$ pour $t \in I$. Comment se définit le vecteur $\vec{N}(t)$ par rapport au vecteur $\vec{T}(t)$?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $\vec{N}(t)$ est le vecteur unitaire tel que $(\vec{T}(t), \vec{N}(t)) = +\frac{\pi}{2}$.
- ☐ $\vec{N}(t)$ est le vecteur unitaire tel que $(\vec{T}(t), \vec{N}(t)) = -\frac{\pi}{2}$.
- ☐ $\vec{N}(t)$ est le vecteur unitaire tel que $(\vec{T}(t), \vec{N}(t)) = +\frac{3\pi}{2}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 8

Soit le vecteur $\vec{T}'(t)$ dont les coordonnées correspondent aux dérivées premières de celles du vecteur $\vec{T}(t)$. Après avoir exprimé les coordonnées de $\vec{T}'(t)$, déterminez, en fonction de t , le réel $c(t)$ tel que :

$$\vec{T}'(t) = c(t)\vec{N}(t), \text{ pour } t \in I.$$

Quelle est la bonne expression de $c(t)$? $c(t)$ est la **courbure** de la courbe $\mathcal{C}_I$ au point $M(t)$.

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $c(t) = \pi t^2$.
- ☐ $c(t) = \frac{\pi}{2}t$.
- ☐ $c(t) = \pi t$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 9

Déterminez la valeur de la courbure aux points O et A respectivement, puis en déduire celle obtenue aux points E et B respectivement. Quelles sont les bonnes valeurs ?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $O : 0 ; A : \pi ; E : 0 ; B : \pi$.
- ☐ $O : \pi ; A : 0 ; E : \pi ; B : 0$.
- ☐ $O : 0 ; A : \pi/2 ; E : 0 ; B : \pi/2$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 10

Comment varie la courbure $c(t)$ du point O au point A ?

Cochez la bonne proposition.

- ☐ $c(t)$ varie de 0 à π , proportionnellement à t^2 .
- ☐ $c(t)$ varie de 0 à 1, linéairement en fonction de t .
- ☐ $c(t)$ varie de 0 à π , linéairement en fonction de t .
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

PROBLÈME 2 : ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

Soit la fonction f numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-2)(x-6)}.$$

Question 11

Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f ?

Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\mathbb{R} \setminus \{-2, -6\}$.
- ☐ $\mathbb{R} \setminus \{+2, -6\}$.
- ☐ $\mathbb{R} \setminus \{-2, +6\}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 12

Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 13

Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$$

Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = +\infty$.
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = -\infty$.
- ☐ $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = +\infty$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 14

Déterminez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Cochez la proposition correcte.

- ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2.$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +2.$
- ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +2; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2.$
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 15

Quelle est l'expression de la dérivée première f' de f ?

Cochez la proposition correcte.

- ☐ $f'(x) = \frac{16x(3-x)}{(x-2)^2(x-6)^2}.$
- ☐ $f'(x) = \frac{16x(x-3)}{(x-2)^2(x-6)^2}.$
- ☐ $f'(x) = \frac{8x(3-x)}{(x-2)^2(x-6)^2}.$
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 16

Après avoir étudié le signe de la fonction f' , complétez le tableau des variations de la fonction f ci-dessous. On indiquera les valeurs remarquables de f et f' et toutes les limites.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$		

Question 17

Quels sont les extremums relatifs de la fonction f ? Cochez la proposition correcte.

- ☐ un maximum relatif en $x = 0$ égal à 0 ; un minimum relatif en $x = 3$ égal à -6 .
- ☐ un minimum relatif en $x = 0$ égal à 0 ; un maximum relatif en $x = 3$ égal à -6 .
- ☐ un minimum relatif en $x = 0$ égal à 0 ; un minimum relatif en $x = 3$ égal à -6 .
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 18

Quelles sont les asymptotes de la courbe représentative de la fonction f ?

Cochez la proposition correcte.

- ☐ deux asymptotes verticales : $x = +2$ et $x = +6$; une asymptote horizontale : $y = +2$.
- ☐ deux asymptotes verticales : $x = -2$ et $x = -6$; une asymptote horizontale : $y = +2$.
- ☐ deux asymptotes verticales : $x = +2$ et $x = +6$; une asymptote horizontale : $y = -2$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 19

Quelle est l'expression de la dérivée seconde f'' de f ?

Cochez la proposition correcte.

- ☐ $f''(x) = \frac{16(2x^3 - 9x^2 + 36)}{(x^2 - 8x + 12)^3}$.
- ☐ $f''(x) = \frac{16(2x^3 + 9x^2 + 36)}{(x^2 - 8x + 12)^3}$.
- ☐ $f''(x) = \frac{16(2x^3 - 9x^2 - 36)}{(x^2 - 8x + 12)^3}$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Question 20

Soit la fonction polynôme $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 36$. Étudiez les variations de P sur $\mathbb{R}$ et déterminez un intervalle I dans lequel ce dernier s'annule une fois. Soit α le réel appartenant à I tel que $P(\alpha) = 0$.

Cochez la proposition correcte concernant la concavité de la fonction f .

- ☐ $\alpha \in]-2, -1[$ est l'abscisse d'un point d'inflexion ; f est concave pour $x < \alpha$ et convexe pour $x > \alpha$.
- ☐ $\alpha \in]-2, -1[$ est l'abscisse d'un point d'inflexion ; f est convexe pour $x < \alpha$ et concave pour $x > \alpha$.
- ☐ $\alpha \in]+2, +6[$ est l'abscisse d'un point d'inflexion ; f est concave pour $x < \alpha$ et convexe pour $x > \alpha$.
- ☐ Aucune des trois propositions précédentes.

Fin de l'énoncé