Épreuve de Mathématiques

Concours d'entrée TS'
Durée 1h – Sans document, sans calculatrice.
3 pages – sujet à rendre

Pour le QCM, il y a toujours au moins une réponse correcte (il peut y avoir plusieurs réponses correctes). Aucune justification n'est attendue.

Exercice 1.
Soit la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^2}{n^2}$.

- ☐ La série numérique est une série géométrique
- ☐ La série numérique est une série convergente
- ☐ La série numérique est une série divergente
- ☐ Le théorème de d'Alembert permet de déterminer la nature de cette série numérique
- ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^2}{n^2} = \frac{\mathrm{e}^2\,\pi^3}{6}$

Exercice 2.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par les conditions suivantes :

- f est 2π-périodique,
- pour tout $x \in [-\pi, 0]$, $f(t) = 0$,
- pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(t) = -\pi + t$,

De plus, on donne les coefficients de Fourier suivants :

- pour $n \geqslant 1$, $a_n(f) = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$;
- pour $n \geqslant 1$, $b_n(f) = \frac{-1}{n}$.

et on note S_f la série de Fourier de la fonction f.

- ☐ f est une fonction régularisée
- ☐ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = S_f(t)$ d'après l'égalité de Parseval
- ☐ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = S_f(t)$ d'après le théorème de Dirichlet
- ☐ $a_0(f) < 0$
- ☐ $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 3.

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note f l'application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $\mathbf{A}$.

On note $\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- ☐ La famille $\mathscr{B} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $\det(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3) = 0$
- ☐ Les vecteurs de la famille $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{A}$
- ☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ L'application linéaire f est un projecteur

Exercice 4.

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$. On pose $x = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

- ☐ $\cos t = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
- ☐ $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1+x^2}{2}$
- ☐ Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $t \mapsto \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est une fonction bijective.
- ☐ Avec le changement de variable, $I = \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
- ☐ Avec le changement de variable, $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 5.
On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} x^{2n}$ et on note S sa somme.

- ☐ Le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$.
- ☐ Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$.
- ☐ La somme de cette série entière est $S(x) = \arctan x$.
- ☐ La somme de cette série entière est $S(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
- ☐ La décomposition en élements simples de $\dfrac{1}{1-x^2}$ est $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$.
- ☐ La fonction $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Exercice 6.
On se place dans le plan $\mathscr{P}$ orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe paramétrée définie pour le paramètre $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos^2(t) \end{cases}$$

et on note $M(t)$ le point de la courbe paramétrée de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$.

- ☐ $M(-t)$ est obtenu à partir de $M(t)$ par une symétrie d'axe (Oy).
- ☐ En $t = 0$, la courbe admet un point stationnaire.
- ☐ La tangente au point $M(0)$ a pour pente 2.
- ☐ La tangente au point $M(0)$ a pour pente -2.
- ☐ Lorsque $t \neq 0 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, une équation cartésienne de la tangente en $M(t)$ est

$$T_{M(t)} : -2\cos(t)x + y + \cos^2(t) = 0$$

Exercice 7. Soit $\mathbf{A}$ une matrice à coefficients réels de taille $n \times n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

- ☐ $\det(\mathbf{A} + \mathbf{A}) = 2 \times \det(\mathbf{A})$.
- ☐ $\det(\mathbf{A} + \mathbf{A}) = 2^n \times \det(\mathbf{A})$.
- ☐ Si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
- ☐ $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \mathbf{A}$ est diagonalisable.
- ☐ $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \mathbf{A}$ est inversible.

Exercice 8. Dans le plan complexe orienté, on note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 d'affixe $z_2 = z_1^2$.

- ☐ Si $|z_1| = 1$ alors $|z_2| = 1$.
- ☐ $\arg(z_1) = 2 \times \arg(z_2)$
- ☐ $\arg(z_2) = 2 \times \arg(z_1) + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- ☐ $\arg(z_2) = 2 \times \arg(z_1) + 2k\pi (k \in \mathbb{N})$
- ☐ Si $z_1 = \mathrm{i}$ alors les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

**************** **Fin du sujet** ****************