Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET METIERS
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES

CONCOURS D'ENTRÉE

TS et TS'

Session 2016

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée : 3 heures – Coefficient : 2

Documents Interdits

Calculatrice ESGT uniquement

L'utilisation de la calculatrice personnelle est interdite

Le sujet comporte 7 pages

Optique

Exercice n°1 : Mesure de l'indice d'un liquide

Sur un cylindre en verre d'indice n_0, on place une cuve sans fond contenant un liquide d'indice $n < n_0$. En un point I de l'interface liquide-verre AB, on fait arriver un faisceau lumineux ayant toutes les incidences, i_1, possibles. Les rayons lumineux pénètrent dans le cylindre et on considère ceux qui sortent par la face BC. L'indice de l'air sera pris égal à 1. Les notations sont celles de la figure 1.

1) A partir de la relation de Snell – Descartes définir :
   a) l'angle limite de réfraction.
   b) l'angle de réflexion totale.

2) Quelle condition doit satisfaire l'angle i_2 pour que le faisceau puisse émerger de la face BC ? (La hauteur du cylindre est suffisamment grande pour ne pas limiter l'émergence du faisceau lumineux).

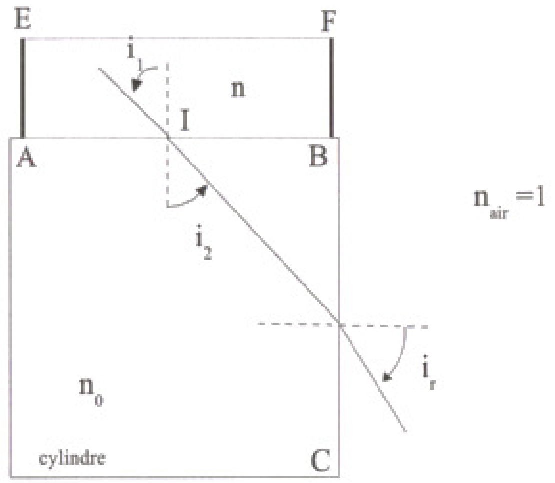
3) En déduire les valeurs permises pour les angles i_1, i_2 en fonction de n et n_0.

4) Les conditions précédentes étant réalisées, on remarque que le faisceau émergent est limité en hauteur par un rayon faisant un angle, $i_r = i_0$, avec la normale au dioptre BC. Exprimer i_0 en fonction de n_0 et n.

5) La mesure de i_0 permet de calculer n lorsque l'on connaît n_0. Pour un cylindre d'indice n_0 donné, quels indices n peut-on mesurer ?

6) Si le faisceau incident frappait l'interface air-liquide EF, le dispositif permettrait-il encore de calculer l'indice du liquide à partir de la mesure de i_0 ? Détailler vos calculs.

Figure 1 : réfractomètre



Exercice n°2 : L'appareil photographique

On considère l'objectif d'un appareil photographique, constitué de deux lentilles minces de focales $f'_1 = 4\,cm$ et $f'_2 = -6\,cm$, représenté sur la figure 2. Il permet d'obtenir une image nette sur un écran photosensible en modifiant la valeur de la distance d, la distance D restant fixe.

1) Image d'un objet à travers une lentille divergente.

a) Faire une construction soignée de l'image d'un objet virtuel à travers une lentille divergente. Deux cas sont à considérer selon que l'objet se situe avant ou après le foyer objet de la lentille.

b) Dans quel cas l'image est-elle réelle ?

2) Mise au point à l'infini.

a) Le système est réglé pour observer des objets à l'infini. Quel est nécessairement le signe de $(D - f'_1)$ pour que ceci soit possible ? Expliquer votre raisonnement.

b) Lorsque cette condition est réalisée, donner l'expression de d, notée d_∞, en fonction de $(D - f'_1)$ et f'_2 correspondant à ce réglage. Faire l'application numérique pour $D = 5$ cm.

c) Faire un schéma soigné du système et construire l'image d'un objet AB à l'infini vu sous l'angle α.

d) Calculer la taille de l'image en fonction de α.

3) Modification du système.

a) Lorsqu'on veut mettre au point sur un objet à distance finie, dans quel sens faut-il déplacer la lentille divergente ? Préciser votre raisonnement.

b) On souhaite réaliser un système tel que d_∞ corresponde à D.
Calculer la nouvelle valeur, D_0, de D à donner au système. Interpréter cette valeur.

4) Latitude de mise au point

a) Le système étant réglé sur $D = D_0$, indiquer la profondeur de mise au point du système, c'est-à-dire le domaine des positions de l'objet AB susceptibles de donner une image nette sur l'écran lorsque l'on donne à d une valeur adaptée.

b) Déterminer la position de l'objet AB lorsque $d = 6$ cm.

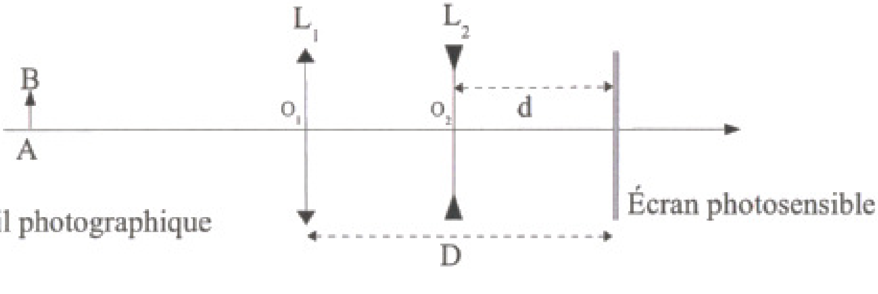


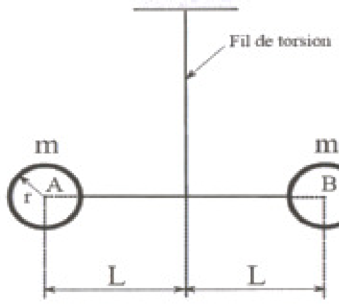
Figure 2 : appareil photographique

Mécanique

Les parties A et B sont pratiquement indépendantes. La valeur de la constante de torsion du fil sera néanmoins nécessaire pour la partie B.

Un pendule de torsion est constitué par un fil de torsion auquel est accroché un fléau (Fig. 1). Le fléau consiste en une tige AB de longueur 2L aux extrémités de laquelle sont disposées deux sphères pleines, homogènes, de masse m, de rayon r, centrées respectivement en A et B. Les sphères sont constituées de platine. La masse de la tige sera supposée négligeable devant celle des sphères.

Figure 1 : pendule de torsion



Données numériques :

Demi longueur de la tige AB : $L = 0{,}100$ m
Masse d'une sphère de platine : $m = 50{,}0 \times 10^{-3}$ kg
Masse volumique du platine : $\mu = 21\,500$ kg m^{-3}

PARTIE A

On suppose que le moment d'inertie J du fléau par rapport à l'axe du fil de torsion est donné par :

$$J = 2mL^2 \ .$$

Soit θ l'angle qui mesure l'élongation angulaire du fléau par rapport à sa position d'équilibre (Fig. 2). Lorsque le fléau est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ, il subit un couple de rappel dont le moment par rapport à l'axe du fil de torsion est $- C\theta$, où C est la constante de torsion du fil.

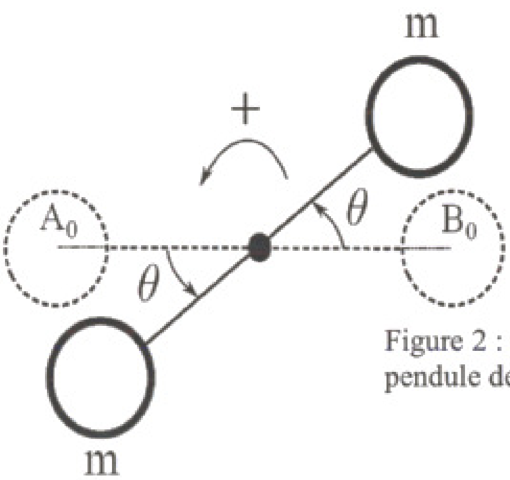


Figure 2 : vue de dessus du pendule de torsion

1) De quel théorème de mécanique la relation : $J\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$ (ED1) découle-t-elle ? Donner l'unité SI de la constante C.

2) Le fléau est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_0 = 60°$ et abandonné à lui-même sans vitesse initiale. L'instant précis du lâcher sera choisi comme origine du temps.
Vérifier que, dans ces conditions, l'équation horaire du mouvement du fléau, solution de l'équation différentielle ED1, s'exprime par :

$$\theta(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad \text{(E1)}$$

à condition de poser : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J}}$; $A_0 = \theta_0$; $\phi_0 = 0$.

3) Décrire le mouvement réalisé par le fléau et exprimer sa période propre T_0 en fonction de C et J.

4) Sachant que T_0 = 4 minutes 56 secondes, calculer numériquement la constante de torsion C du fil.

Un modèle plus réaliste du pendule de torsion doit prendre en compte les frottements. L'effet résultant de ces derniers est assimilé à un couple résistant dont le moment par rapport à l'axe du fil est donné par $-f\dfrac{d\theta}{dt}$, où f est un coefficient de frottement.

5) Donner l'unité SI du coefficient f.

6) Donner la nouvelle équation différentielle ED2 vérifiée par l'élongation angulaire sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\,\omega_0\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{(ED2)},$$

où λ est un coefficient positif que l'on exprimera en fonction de f, C et J.

7) Montrer que λ est un coefficient sans dimension. Donner le nom donné usuellement à ce coefficient.

8) Lorsque les frottements sont d'intensité modérée, on peut vérifier que λ est strictement inférieur à 1. Calculer alors la valeur limite f_{max} du coefficient de frottements qui permet de satisfaire cette condition.

9) Vérifier que, dans cette hypothèse et avec des conditions initiales strictement identiques à celles de la question 2, l'équation horaire du mouvement du fléau, solution de l'équation différentielle ED2, s'exprime par :

$$\theta(t) = \theta_i\, e^{-\lambda\omega_0 t}\cos(\omega t - \varphi), \quad \text{(E2)}$$

à condition de poser : $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$, $\tan\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ et θ_i une constante à déterminer.

10) Décrire le mouvement du fléau en présence de frottements modérés. Que représente la grandeur $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ pour ce mouvement ? Donner l'allure du graphe horaire θ(t) en fonction du temps.

11) Montrer que l'erreur relative e(T) commise sur T en l'assimilant à la période propre T_0 est donnée par :

$$e(T) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1 \ .$$

Indications :
L'erreur relative e(X) sur la grandeur X lorsque cette dernière est assimilée à une approximation X_{app} est donnée par :

$$e(X) = \left| \frac{X - X_{app}}{X_{app}} \right| \ .$$

Cette erreur est exprimée en pourcentage ou en ppm.

12) Exprimer cette erreur dans le cas d'un amortissement très faible $(\lambda \ll 1)$. On donne le développement limité $(1+\epsilon)^\alpha = 1 + \alpha\epsilon$ lorsque $\epsilon \ll 1$, α étant un nombre réel. Calculer numériquement la valeur de e(T).

13) Durant le mouvement du fléau, l'amplitude angulaire est réduite de moitié au bout de 10 oscillations. Montrer que cette constatation se traduit par :

$$e^{-10\lambda\omega_0 T} = \frac{1}{2} \quad \text{(R1)}.$$

14) Calculer numériquement la valeur du coefficient λ.

PARTIE B

L'intensité F_g de la force d'attraction gravitationnelle qui s'exerce entre deux masses ponctuelles m et M, séparées par la distance d_0 est donnée par :

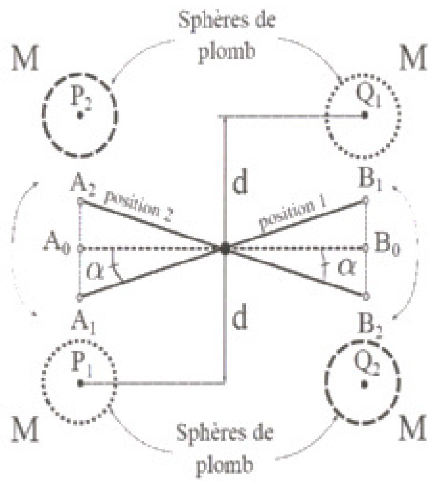
$$F_g = G\frac{Mm}{d_0^2} \quad \text{(R2)},$$

où G est la constante de gravitation universelle.

L'expérience historique de Cavendish consiste à utiliser le pendule de torsion précédemment étudié (cf partie A) pour déterminer la valeur numérique de la constante G. En supposant le pendule à l'équilibre dans la position A_0B_0 (Fig. 3), on approche des extrémités du fléau deux sphères en plomb homogènes, de masse M, centrées en P_1 et Q_1 respectivement. On suppose que les points A_0, B_0, P_1 et Q_1 occupent alors le même plan horizontal. On appelle d la distance qui sépare les points P_1

et Q_1 de l'axe (A_0B_0). Sous l'effet des forces d'attraction gravitationnelle exercées par les sphères de plomb sur les sphères de platine, le fléau se déplace d'un angle α jusqu'à la position d'équilibre A_1B_1. Les sphères de plomb sont ensuite disposées dans les positions symétriques P_2 et Q_2 (cf Fig. 3). Le fléau s'oriente alors, un fois l'équilibre atteint, dans la position A_2B_2 symétrique de A_1B_1 par rapport à l'axe (A_0B_0).

Figure 3 : vue de dessus du pendule de torsion



On admettra que la force d'attraction gravitationnelle exercée par une sphère homogène, de masse M, de centre C en un point extérieur à la sphère est identique à celle exercée au même point par une masse ponctuelle, de masse M, placée en C.

1) Pourquoi, selon vous, les sphères placées aux extrémités du fléau sont-elles constituées d'un matériau dont la masse volumique est élevée ?

2) Lorsque le fléau est dans la position A_1B_1, faire un schéma soigné illustrant le couple de forces qui résulte de l'attraction gravitationnelle des sphères en plomb placées en P_1 et Q_1 exercées sur les sphères de platine placées respectivement en A_1 et B_1. On négligera l'action que chacune des sphères de plomb exerce sur la sphère de platine placée à l'extrémité opposée du fléau.

3) Montrer que, dans l'approximation des petits angles $\alpha < 10°$, le moment M_g de ce couple par rapport à l'axe du fil de torsion, peut s'écrire :

$$M_g = \frac{2\ L\ G\ M\ m}{d^2} \quad \text{(R3).}$$

4) Montrer que l'angle α atteint à l'équilibre vérifie alors la relation : $\alpha = \dfrac{2\ L\ G\ M\ m}{C\ d^2}$ (R4).

En plus des données numériques déjà fournies (cf partie A), on donne :

Masse d'une sphère de plomb :	$M = 30{,}0$ kg
Distance à l'équilibre :	$d = 0{,}150$ m
Constante de gravitation :	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI

5) Donner l'unité SI de la constante G.

6) Calculer la valeur numérique de l'angle α et vérifier qu'il constitue bien un « petit angle ».

Dans l'expérience de Cavendish, la mesure expérimentale de la valeur de l'angle 2α, formé par les deux directions d'équilibre (A_1B_1) et (A_2B_2), permet de déterminer la constante de gravitation G à partir de la relation R4. Pour réaliser cette mesure, le fil de torsion est équipé d'un miroir plan qui renvoie l'image du réticule lumineux d'un viseur (lunette autocollimatrice) (Fig. 4). Ce viseur est en plus équipé d'une règle graduée sur laquelle on peut observer la position de l'image du réticule suivant l'orientation du miroir. Lorsque celui-ci est perpendiculaire à A_0B_0, l'image se superpose au réticule. Dans les autres cas, l'image reste dans le plan du réticule mais elle est décalée sur la règle graduée.

7) En vous aidant de la figure 4 et sachant que la règle graduée est située à une distance D du centre du miroir, déterminer le déplacement δ sur la règle lorsque le pendule se déplace entre les directions d'équilibre (A_1B_1) et (A_2B_2).

8) Sachant que D = 5,00 m, calculer numériquement le déplacement δ pour l'angle calculé à la question 6.

9) Quelle erreur relative peut-on tolérer sur la mesure de δ pour espérer pouvoir calculer la constante de gravitation avec trois chiffres significatifs ?

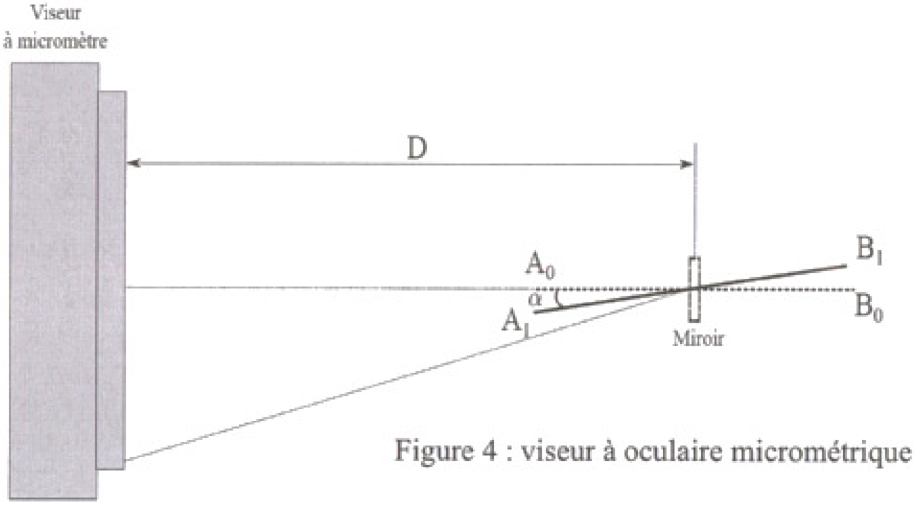


Figure 4 : viseur à oculaire micrométrique

Fin du sujet